

C1.4 Energia Medie a Radiației Corpului Negru

Pentru energia medie pe mod de vibrație se apelează la formula integrală în probabilități, pentru a acoperi întreg spectrul energetic posibil

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E \wp(E) dE}{\int_0^{\infty} \wp(E) dE}$$

cu expresia probabilității dată în relație cu energia termică ($k_B T$, k_B -constanta lui Boltzmann)

$$\wp(E) = \frac{1}{k_B T} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

astfel încât să fie satisfăcută relația de normare (la certitudine) a probabilității (totale) pe spectrul tuturor evenimentelor energetice posibile

$$\int_0^{\infty} \wp(E) dE = 1$$

Cu aceste considerente, energia medie pe mod de vibrație se scrie succesiv

$$\langle E \rangle_T = \int_0^{\infty} E \wp(E) dE = -\int_0^{\infty} E \frac{\partial}{\partial E} \left[\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \right] dE$$

$$= -\int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial E} \left[E \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \right] - \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \right\} dE$$

$$= -\left[E \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \right]_0^{\infty} + k_B T = k_B T$$

regăsind valoarea energiei termice, în acord cu teorema echipartiției energiei din termodinamica (statistică) clasică.

Alternativ, se poate calcula direct energia termică medie, astfel

$$\langle E \rangle_{\beta=1/k_B T} = \frac{\int_0^{\infty} E \exp(-E\beta) dE}{\int_0^{\infty} \exp(-E\beta) dE} = -\frac{d}{d\beta} \left[\log \int_0^{\infty} \exp(-E\beta) dE \right] = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

Combinat cele două expresii ale numărului de moduri de vibrație cu energia medie de vibrație și raportate la volumul incintei corpului negru se obține expresia densității energiei spectrale sub forma expresiei Rayleigh-Jeans (R-J) reliefând prin dependența parabolică de frecvența radiației criza fizicii clasice aplicată la fenomene radiative

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi k_B T \nu^2}{c^3} \equiv \rho_{R-J}(\nu)$$

datorită predicției catastrofei UV, în contradicție atât cu fenomenle observate la nivel de laborator cât și la nivelul naturii ca ansamblu (viața pe Terra ar pieri datorită radiației solare conform acestei predicții!).